О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ РЕШЕНИЕМ И РЕЗОЛЬВЕНТОЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО РАВНОВЕСИЯ*

(Поступило 29 сентября 1928)

Показано, что между решением $\chi(\tau)$ и резольвентой $\Gamma(\tau, t)$ интегрального уравнения лучистого равновесия имеет место соотношение

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = \Gamma(0, \tau).$$

Э. Хопф [1] показал, что однородное интегральное уравнение лучистого равновесия

$$B(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,|\tau - t|\,B(t)\,dt \tag{1}$$

имеет нетривиальное решение. Мы попытаемся здесь показать, что решение Хопфа находится в тесной связи с резольвентой ядра $Ei\,|\tau - t|$ [2].

§ 1. Прежде всего рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$Ei\tau = \Phi(\tau) - \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,|\tau - t|\,\Phi(t)\,dt. \tag{2}$$

Можно доказать, что решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$\Phi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau), \tag{3}$$

---

* Über die Beziehung der Lösung und der Resolvente der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts. Z. f. Ph. **52**, 263, 1929.

причем

$$a_1(\tau) = Ei\tau \tag{4}$$

и

$$a_{i+1}(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Ei\,|\tau - t|\,a_i(t)\,dt \quad (i = 1, 2 \cdot \cdots). \tag{4'}$$

При этом ряд (3) является равномерно сходящимся.

Действительно, мы имеем

$$a_2(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Ei\,|\tau - t\,|\,Ei\,t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B,$$

где обозначено:

$$A = \int\limits_0^1 \text{ и } B = \int\limits_1^\infty.$$

Для B имеем

$$B = \int\limits_1^\infty Ei\,|\tau - t|\,Eit\,dt < 2\int\limits_1^\infty Ei\,|\tau - t\,|\,Ei_2 t dt,$$

где введено обозначение*

$$Ei_2 t = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-ty}}{y^2}\,dy = e^{-t} - tEit.$$

---

* Так как мы имеем

$$Ei\tau = \frac{e^{-\tau}}{\tau + \Theta(\tau)}, \text{ где } (0 \leqslant \Theta \leqslant 1)$$

(сравнить Хопф, Z. f. Ph., **46**, 375, 1928). Пусть $\tau > 1$. Тогда

$$Ei\tau = \frac{e^{-\tau}}{\tau + \Theta(\tau)} > \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\tau}}{\tau}.$$

Отсюда следует

$$Ei_2\tau = \int\limits_\tau^\infty Eiydy > \frac{1}{2}\int\limits_\tau^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy > \frac{1}{2}Ei\tau$$

или

$$Ei\tau < 2Ei_2\tau, \text{ когда } \tau > 1.$$

Далее

$$A = \int_0^1 Ei\,|\tau - t\,|\,Ei\,t\,dt = Ei\,|\tau - \delta|\int_0^1 Ei\,t\,dt \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant 1)$$

или

$$A < \frac{3}{2}\,eEi\tau < 3eEi_2\tau,$$

если $\tau > 2$*.

Так как A является непрерывной функцией τ и $Ei_2\tau$ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant 2$ всегда больше нуля и также непрерывна, то мы можем выбрать такое M, что будет иметь место

$$\int_0^1 Ei\,|\tau - t\,|\,Ei\,t\,dt < MEi_2\tau.$$

Итак имеем:

$$a_2(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,|\,\tau - t\,|\,Ei\,t\,dt < \int_1^\infty Ei\,|\,\tau - t\,|\,Ei_2\,t\,dt + MEi_2\tau <$$

$$< \int_0^\infty Ei\,|\tau - t\,|\,Ei_2 t\,dt + MEi_2\tau. \tag{5}$$

Мы определяем теперь функциональный ряд $\Psi_1(\tau)$, $\Psi_2(\tau)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ посредством соотношений

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1(\tau) &= \frac{1}{2}\,Ei_2\tau \\ \Psi_{n+1}(\tau) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,|\tau - t\,|\,\Psi_n(t)\,dt \qquad (n = 1,\ 2\cdot\cdot\cdot) \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Тогда из (6) получаем:

$$a_2(\tau) < 2M\Psi_1(\tau) + 4\Psi_2(\tau)$$

и, принимая во внимание (6) и (4′),

$$a_{n+1}(\tau) < 2M\Psi_n(\tau) + 4\Psi_{n+1}(\tau). \tag{7}$$

---

* В самом деле, при $\tau > 2$

$$\frac{Ei\,|\,\tau - \delta\,|}{Ei\tau} = \frac{\dfrac{e^{-\tau+\delta}}{\tau + \Theta\,(\tau - \delta)}}{\dfrac{e^{-\tau}}{\tau + \Theta\,(\tau)}} = \frac{e^{\delta}\,[\tau + \Theta\,(\tau)]}{\tau + \Theta\,(\tau - \delta)} \leqslant \frac{e^{\delta}\,(\tau + 1)}{\tau} = e^{\delta}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \leqslant \frac{3}{2}\,e.$$

Ряд положительных функций $\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\tau)$ равномерно сходится [3], откуда следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} [2M\Psi_i(\tau) + 4\Psi_{i+1}(\tau)]$ обладает тем же свойством. Тогда неравенство (7) показывает, что разложение $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau)$ также равномерно сходится. Согласно [4],

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\tau) = 1$$

и мы заключаем, что

$$\varkappa(\tau) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\tau) \tag{8}$$

является ограниченной и непрерывной функцией τ. Теперь непосредственная подстановка (3) в (2) показывает, что мы нашли решение уравнения (2).

Итак, мы можем написать решение уравнения (2) в виде:

$$\Phi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau) = Ei\tau + \varkappa(\tau). \tag{9}$$

Если мы теперь обозначим через $K^{(n)}(\tau, t)$ итерированные ядра, принадлежащие к ядру $Ei|\tau - t|$, то получим:

$$a_i(t) = \frac{1}{2^{n-1}} K^{(n)}(0, t), \tag{10}$$

если учтем определения (4) и (4').

Итак, мы находим, что

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} K^{(i)}(0, t) = \Gamma(0, t), \tag{11}$$

где $\Gamma(\tau, t)$ является разрешающим ядром или резольвентой интегрального уравнения

$$f(\tau) = x(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t|\, x(t)\, dt. \tag{12}$$

Легко видеть, что

$$\int_0^\infty \Phi(t)\,Ei_2t\,dt = \sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty a_i(t)\,Ei_2t\,dt = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^{i-1}} \int_0^\infty K^{(i)}(0,\ t)\,Ei_2t\,dt =$$

$$= 4\sum_{i=2}^\infty \Psi_i(0) = 4\,[1 - \Psi_i(0)] = 2. \tag{13}$$

При этом возможность почленного интегрирования можно без труда доказать.

§ 2. Запишем уравнение (2) в виде:

$$\Phi(\tau) = Ei\tau + \frac{1}{2}\int_0^\tau + \frac{1}{2}\int_\tau^\infty = Ei\tau + \frac{1}{2}\int_0^\tau Eix\,\Phi(\tau - x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty Eix\Phi(\tau + x)\,dx.$$

Тогда посредством интегрирования отдельных слагаемых получим:

$$\int_0^s \left[Eit + \frac{1}{2}\int_0^\tau Eix\,\Phi(\tau - x)\,dx\right]d\tau = \frac{1}{2}\int_0^s Eix\,\chi(s - x)\,dx,$$

где

$$\chi(s) = 2 + \int_0^s \Phi(\tau)\,d\tau$$

и

$$\frac{1}{2}\int_0^s d\tau \int_0^\infty Eix\,\Phi(\tau + x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty Eix\,\chi(\tau + x)\,dx\ \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=s} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty Eix\,\chi(s + x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty Eix\,\chi(x)\,dx. \tag{14}$$

Значит,

$$\chi(s) - 2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty Eix\,\chi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^s Eix\,\chi(s - x)\,dx + \int_0^\infty Eix\,(s + x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,|s - t|\,\chi(t)\,dt. \tag{15}$$

Из (13) и (14) следует

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty Eix\,\chi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty 2Ei\,xdx + \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,xdx\int_0^x \Phi(t)\,dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(x)\,Ei_2\,xdx = 2.$$

Поэтому уравнение (15) переходит в

$$\chi(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty Ei\,|s-t|\,\chi(t)\,dt, \tag{16}$$

т. е. $\chi(\tau)$ есть решение интегрального уравнения Милна.

Из $\frac{d\chi}{d\tau} = \Phi(\tau)$ и (10) можно заключить, если учесть ограниченность $\varkappa(\tau)$, что $\chi(\tau) < M + N\tau$, где M и N являются двумя положительными постоянными.

Хопф показал, что существует единственное такое решение (с точностью постоянного коэффициента) уравнения (1). Итак, мы имеем следующий результат. Между резольвентой интегрального уравнения (12) и решением интегрального уравнения Милна, полученным Хопфом, имеет место соотношение:

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = \Gamma(0, \tau). \tag{17}$$

Ленинград, 26 сентября 1928 г

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hopf. Z. f. Ph. **46**, 374, 1928, см. также Z. f. Ph. **49**, 155, 1928.
2 В. А. Амбарцумян, Н. А. Козырев, MN, **87**, 651, 1927.
3. В. А. Амбарцумян, Н. А. Козырев, MN, **87**, 213, 1927, Z. f. Ph. **47**, 607, 1928.
4. U. Wegner, Z. f. Ph. **45**, 826, 1927.